****

1. **Deret Tak Hingga**
2. **Geometri dalam Ruang Vektor**

**TUJUAN PEMBELAJARAN**

Agar pembaca memahami apa yang disebut Barisan Takhingga dan jenis-jenis Barisan Takhingga beserta Uji Konvergensinya, Deret Takhingga yang meliputi Deret Takhingga Biasa, Deret Pangkat, Deret Taylor dan Deret McLaurint beserta Uji Konvergensinya

**OUTCOME PEMBELAJARAN**

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami dan mampu menyelesaikan barisan takhingga beserta uji konvergensinya
2. Memahami dan mampu menyelesaikan deret takhingga beserta uji konvergensinya
3. Memahami dan mampu menyelesaikan deret pangkat beserta selang konvergensinya
4. Memahami dan mampu menyelesaikan deret Pangkat, deret Taylor dan deret Maclaurint beserta Selang Konvergensinya
   1. **Barisan Takhingga**

Barisan bilangan banyak sekali kita jumpai baik dalam matematika maupun yang lainnya, misalnya ada barisan bilangan-bilangan 3, 5, 7, 9, . . . . disebut barisan tak terhingga karena panjang barisan tidak bias kita tentukan.

**Definisi :**

**Barisan takhingga  adalah sebuah fungsi yang daerah asalnya *(domainya)* himpunan bilangan asli *(N)***

Karena n merupakan bilangan asli, maka n = 1, 2, 3,. . . . sehingga suatu barisan**** dapatditulis suku-sukunya yaitu :

****

****disebut Rumus Barisan atau Suku ke n

****disebut suku ke 1, ****disebut suku ke 2, ****disebut suku ke 3 dan seterusnya

Perlu diketahui, untuk lebih mempermudah maka dalam setiap menuliskan sebuah barisan, maka minimal harus menuliskan empat suku yang pertama.

**Contoh 2.1 :**

Diketahui barisan 2, 2, 2, 2,. . . . .(2). . . .

**Penyelesaian 2.1 :**

Dari barisan tersebut diketahui ****, **, , ** dan suku ke n adalah ****

**Contoh 2.2 :**

Diketahui barisan 2, 5, 8, 11,. . . . .(3n-1). . . .

**Penyelesaian 2.2 :**

Dari barisan tersebut diketahui ****, **, , ** dan suku ke n adalah ****

**Contoh 2.3 :**

Diketahui barisan 2, 7, 14, 23,. . . . .(n2+2n-1). . . .

**Penyelesaian 2.3 :**

Dari barisan tersebut diketahui ****, **, , ** dan suku ke n adalah ****

**Contoh 2.4 :**

Diketahui barisan 

**Penyelesaian 2.4 :**

Dari barisan tersebut diketahui ****, **, , ** dan suku ke n adalah **** atau rumus eksplisitnya

Untuk menentukan rumus barisan secara eksplisit, maka perlu diketahui bahwa sebuah barisan mempunyai jenis, yaitu

* + 1. **Barisan Konstan Takhingga**

Barisan konstan adalah barisan yang setiap sukunya tetap atau konstan, secara umum dirumuskan secara eksplisit sebagai berikut :



**Contoh 2.5 :**

Diketahui barisan konstan sebagai berikut :

♦. 2, 2, 2, 2, . . . . . .2, . . . maka 

♦. 5, 5, 5, 5, . . . . . . 5, . . . , maka 

♦. , maka 

* + 1. **Barisan Linier Takhingga**

Barisan linier adalah barisan dimana selisih kedua suku yang berurutan adalah sama, selisih ini dilambangkan dengan  atau beda, sehingga jika terdapat barisan di mana **,** maka barisan itu dalah barisan linier, secara umum Suku ke n atau rumus eksplisit untuk barisan linier sebagai berikut :



Dimana :

 : suku ke 1 atau 

 : beda atau selisih dua suku yang berdampingan

**Contoh 2.6 :**

Diketahui barisan takterhingga tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut atau tentukan 

**Penyelesaian 2.6 :**

Dari barisan diketahui **, , , ,** maka diketahui :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka  dan ****

Jadi rumus eksplisitnya :









Sehingga rumus eksplisit barisan di atas adalah 

**Contoh 2.7 :**

Diketahui barisan takterhingga tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut atau 

**Penyelesaian 2.7 :**

Dari barisan diketahui **, , , ,** maka diketahui :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka  dan ****

Jadi rumus eksplisitnya :









Sehingga rumus eksplisit barisan di atas adalah 

* + 1. **Barisan Kuadrat Takhingga**

Barisan kuadrat adalah barisan yang mempunyai

♦. beda () dua suku yang berdampingan tidak sama

♦. selisih () dua beda yang berdampingan sama

Misalkan terdapat barisan kuadrat yaitu ****yang disebut beda () adalah

****

****

**** dimana  dan selisih dari ,  dan nilainya sama yaitu ****

Misalkan terdapat barisan sebagai berikut :



Secara umum barisan kuadrat mempunyai rumus eksplisit sebagai berikut :



Dimana :

**** ** **

**Contoh 2.8 :**

Diketahui barisan takterhingga 2, 6, 12, 20, . . . .tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut atau 

**Penyelesaian 2.8 :**

Dari barisan 2, 6, 12, 20, . . . diketahui **, , , **, sehingga diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena beda setiap suku yang berdampingan tidak sama atau , maka barisan di atas ***bukan barisan linier***.

dan karena itu ditentukan :

⇒ 

⇒ 

Karena , maka **** sehingga diperoleh :

Atau dapat kita lihat seperti berikut :



Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ **  ⇒ **

⇒ **** **⇒ **

⇒ ****

** ⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisannya adalah ****

**Contoh 2.9 :**

Diketahui barisan takterhingga 6, 12, 20, 30, . . . .tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut 

**Penyelesaian 2.9 :**

Dari barisan 6, 12, 20, 30, . . . diketahui **, , , **, sehingga diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena beda setiap suku yang berdampingan tidak sama atau , maka barisan di atas ***bukan barisan linier***.

dan karena itu ditentukan :

⇒ 

⇒ 

Karena , maka **** sehingga diperoleh :

Atau dapat ditentukan dengan cara :



Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ ****

⇒ ****

** ⇒   ⇒ **

**⇒  ⇒ **

⇒ ** ⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisannya adalah ****

**Contoh 2.10 :**

Diketahui barisan takterhingga 2, 5, 12, 23, . . . .tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut 

**Penyelesaian 2.10 :**

Dari barisan 2, 5, 12, 23, . . . diketahui **, , , **, sehingga diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena beda setiap suku yang berdampingan tidak sama atau , maka barisan di atas ***bukan barisan linier***.

dan karena itu ditentukan :

⇒ 

⇒ 

Karena , maka **** sehingga diperoleh :

Atau dapat ditentukan dengan cara :



Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ ****

⇒ ****

** ⇒   ⇒ **

**⇒  ⇒ **

⇒ ** ⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisannya adalah ****

* + 1. **Barisan Rasional Takhingga**

Barisan rasional adalah barisan yang dibentuk dari barisan Pembilang  dibagi barisan penyebut .

**Contoh 2.11 :**

Diketahui barisan  maka disebut barisan Rasional, karena barisan tersebut dibentuk dari :

1. Barisan Pembilang : 
2. Barisan Penyebut : 

**Contoh 2.12 :**

Diketahui barisan , maka disebut barisan Rasional, karena barisan tersebut dibentuk dari :

1. Barisan Pembilang : 
2. Barisan Penyebut : 

**Contoh 2.12 :**

Diketahui barisan , maka disebut barisan Rasional, karena barisan tersebut dibentuk dari :

1. Barisan Pembilang : 
2. Barisan Penyebut : 

Karena barisan rasional dibentuk dari barisan pembilang dan barisan penyebut, maka untuk menentukan rumus barisan rasional adalah dengan cara menentukan rumus barisan pembilang atau **** dan rumus barisan penyebut atau **,** sehingga rumus barisan rasional diperoleh dari ****

**Contoh 2.13 :**

Diketahui barisan Rasional  tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut atau ****

**Penyelesaian 2.13 :**

Karena barisan di atas merupakan barisan rasional, maka barisan tersebut dibentuk dari barisan pembilang dan barisan penyebut :

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 1, 2, 3, 4, . . . maka : Diketahui **, , , **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena ****, maka  dan barisan pembilang tersebut adalah **barisan linier** , maka rumusnya :

⇒ ****

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

**➋. Barisan Penyebut ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 2, 5, 8, 11, . . . maka : Diketahui , , ,  dan

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena ****, maka  dan barisan penyebut tersebut adalah **barisan linier** , maka rumusnya :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Sehingga rumus barisan  adalah  atau

**Contoh 2.14 :**

Diketahui barisan Rasional  tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut atau ****

**Penyelesaian 2.14 :**

Karena barisan di atas merupakan barisan rasional, maka barisan tersebut dibentuk dari barisan pembilang dan barisan penyebut :

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 2, 8, 18, 32, . . . maka : Diketahui **, , , **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena ****, maka barisan pembilang tersebut adalah **barisan kuadrat** , maka diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Dan diperoleh ****, dan 

Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ ****

⇒ ****

** ⇒   ⇒ **

**⇒  ⇒ **

⇒ ** ⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisan pembilang adalah ****

**➋. Barisan Penyebut ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 3, 8, 15, 24, . . . maka : Diketahui , , , , maka diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena ****, maka barisan penyebut tersebut adalah **barisan kuadrat** , sehingga diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Dan diperoleh ****, atau 

Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ ****

⇒ ****

** ⇒   ⇒ **

**⇒  ⇒ **

⇒ ** ⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisan penyebut adalah ****

Sehingga rumus barisan  adalah  atau

**Contoh 2.15 :**

Diketahui barisan Rasional  tentukan rumus eksplisit untuk barisan tersebut atau ****

**Penyelesaian 2.15 :**

Karena barisan di atas merupakan barisan rasional, maka barisan tersebut dibentuk dari barisan pembilang dan barisan penyebut :

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 1, 12, 29, 52, . . . maka : Diketahui **, , , **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena ****, maka barisan pembilang tersebut adalah **barisan kuadrat** , maka diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Dan diperoleh ****, dan 

Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ **** ** ⇒ **

⇒ **** **⇒ **

⇒ ****

** ⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisan pembilang adalah ****

**➋. Barisan Penyebut ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 5, 7, 9, 11, . . . maka : Diketahui , , ,  dan

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena ****, maka  dan barisan penyebut adalah **barisan linier** , maka rumusnya :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Sehingga rumus barisan  adalah  atau 

* 1. **Uji Konvergensi Barisan Takhingga**

Diketahui barisan dan rumus barisan itu adalah  , jika kita memasukan nilai-nilai  dari  sampai  mendekati  , maka akan diperoleh nilai-nilai  yaitu :

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

⇒  

Jika kita memasukan nilai sampai mendekati takhingga , maka akan diperoleh nilai , nilai ini disebut titik konvergensi barisan  atau dengan kata lain barisan  konvergen ke  .

**Definisi :**

**Barisan  dinamakan konvergen menuju ke *L* atau berlimit *L* dan ditulis sebagai :**

****

**Apabila untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk n ≥ N ⇒ ││< ε , suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan Divergen**

**Contoh 2.16 :**

Diketahui barisan Rasional  apakah barisan itu konvergen

**Penyelesaian 2.16 :**

Untuk mengetahui barisan itu konvergen atau tidak, maka harus ditentukan rumus barisan atau .

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 2, 8, 18, 32, . . . maka : Diketahui **, , , **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena ****, maka barisan pembilang tersebut adalah **barisan kuadrat** , maka diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Dan diperoleh ****, dan 

Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ ****

⇒ ****

** ⇒   ⇒ **

**⇒  ⇒ **

⇒ ** ⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisan pembilang adalah ****

**➋. Barisan Penyebut ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 3, 8, 15, 24, . . . maka : Diketahui , , , , maka diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena ****, maka barisan penyebut tersebut adalah **barisan kuadrat** , sehingga diperoleh :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Dan diperoleh ****, atau 

Sehingga kita peroleh :

**** ⇒ ****

⇒ ****

** ⇒   ⇒ **

**⇒  ⇒ **

⇒ ** ⇒ **

diperoleh ,  dan , maka rumus barisan penyebut adalah ****

Sehingga rumus barisan  adalah  atau

Menurut definisi, suatu barisan dikatakan konvergen ke L jika **** , maka :

⇒. **** ****

****

****

****

****

⇒. **** ****

Jadi barisan  konvergen ke 2, artinya jika kita memasukan nilai  ke rumus barisan  , maka nilainya akan mendekati 2

**Contoh 2.17 :**

Diketahui barisan Rasional  tentukan apakah barisan itu konvergen

**Penyelesaian 2.17 :**

Untuk mengetahui barisan itu konvergen atau tidak, maka harus ditentukan dulu rumus barisan atau .

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 1, 2, 3, 4, . . . maka : Diketahui **, , , **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Karena ****, maka  dan barisan pembilang tersebut adalah **barisan linier** , maka rumusnya :

⇒ ****

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

**➋. Barisan Penyebut ()**

Diketahu barisan pembilangnya adalah 1, 3, 5, 7, . . . maka : Diketahui , , ,  dan

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena ****, maka  dan barisan penyebut tersebut adalah **barisan linier** , maka rumusnya :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Sehingga rumus barisan  adalah  atau

Menurut definisi, suatu barisan dikatakan konvergen ke L jika **** , maka :

⇒. **** ****

****

****

****

****

⇒. **** ****

Jadi barisan  konvergen ke , artinya jika kita memasukan nilai  ke rumus barisan  , maka nilainya akan mendekati 

**Soal-Soal Latihan**

**A. Diketahui barisan takhingga  yaitu :**

1.  8. 

2.  9. 

3.  10. 

4.  11. 

5.  12. 

6.  13. 

7.  14. 

Tentukan Rumus Eksplisit barisan tersebut dan apakah barisan itu Konvergen

**B. Diketahui rumus ekplisit untuk barisan , tulislah dari setiap barisan itu lima suku yang pertama**

1.  6. 

2.  7. 

3.  8. 

4.  9. 

5.  10. 

* 1. **Deret Takhingga**

Jika diketahui  merupakan suatu barisan takhingga yaitu ****dan jika setiap suku barisan tersebut kita jumlahkan yaitu **,** maka ****disebut **deret takhingga** dan disebut rumus deret

Karena suku-suku sebuah deret merupakan suku-suku sebuah barisan, maka sebuah deret juga ada beberapa jenis yaitu :

* + 1. **Deret Konstan Takhingga**

Jika diketahui barisan konstan : maka yang disebut deret konstan adalah : atau 

**Contoh 2.18 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.18 :**

Deret , maka barisannya adalah  sehingga rumus barisan , karena  maka diperoleh rumus deret adalah 

**Contoh 2.19 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.19 :**

Deret , maka barisannya adalah  sehingga rumus barisan , karena  maka diperoleh rumus deret adalah 

* + 1. **Deret Linier Takhingga**

Diketahui barisan linier , , , , . . . dengan rumus barisan yaitu  maka jika kita jumlahkan suku-suku barisan linier tersebut yaitu  disebut deret linier dengan rumus :



**Contoh 2.20 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.20 :**

Deret , maka barisan liniernya adalah  sehingga untuk memperoleh rumus barisan adalah :

Diketahui , , , ,

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka diperoleh sehingga rumus barisan liniernya adalah :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Diperoleh , karena  maka diperoleh rumus deret  adalah 

**Contoh 2.21 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.21 :**

Deret , maka barisan liniernya adalah  sehingga untuk memperoleh rumus barisan adalah :

Diketahui , , , ,

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka diperoleh sehingga rumus barisan liniernya adalah :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Diperoleh , karena  maka diperoleh rumus deret  adalah 

* + 1. **Deret Kuadrat Takhingga**

Jika diketahui sebuah barisan kuadrat  maka yang disebut deret kuadrat adalah jumlah dari suku-suku barisan kuadrat tersebut, yaitu :  , karena rumus barisan kuadrat adalah , maka rumus deret kuadrat adalah :



**Contoh 2.22 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.22 :**

Deret , maka barisan kuadratnya adalah  sehingga untuk memperoleh rumus barisan adalah :

Diketahui , , , ,

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka diperoleh harus ditentukan nilai , yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Sehingga diperoleh :

⇒ 

⇒ 

Sehingga diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Diperoleh , karena  maka diperoleh rumus deret  adalah 

**Contoh 2.23 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.23 :**

Deret , maka barisan kuadratnya adalah  sehingga untuk memperoleh rumus barisan adalah :

Diketahui , , , ,

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka barisan adalah barisan kuadrat, sehingga harus ditentukan nilai , yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Sehingga diperoleh :

⇒ 

⇒ 

Sehingga diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Diperoleh , karena  maka diperoleh rumus deret  adalah 

* + 1. **Deret Rasional Takhingga**

Jika diketahui suatu barisan rasional , dimana setiap suku berbentuk , maka yang disebut deret rasional adalah jumlah dari suku-suku barisan rasional tersebut, atau  dan rumus deretnya adalah :



**Contoh 2.24 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.24 :**

Untuk menentukan rumus deret , maka kita tentukan rumus barisannya yaitu barisan Karena barisanya merupakan barisan pecah, maka kita cari rumus barisan pembilang  dan rumus barisan untuk penyebut 

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahui barisan pembilang adalah  sehingga diketahui , , ,  dan karena , maka  sehingga barisan barisan linier, sehingga rumusnya :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

**➊. Barisan Penyebut ()**

Diketahui barisan penyebut adalah maka didapat , , ,  dan :

⇒

⇒

⇒

Karena  maka barisan  merupakan barisan kuadrat, sehingga diperoleh nilai 

⇒

⇒

⇒

 sehingga nilai 

⇒ ****

⇒ ****

⇒ ****

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

⇒ ****

⇒ ****

⇒ ****

Jadi rumus barisan penyebut  adalah 

karena rumus barisan  adalah  maka rumus deret  adalah 

**Contoh 2.25 :**

Diketahui suatu deret :  tentukan rumus deretnya

**Penyelesaian 2.25 :**

Untuk menentukan rumus deret , maka kita tentukan rumus barisannya yaitu barisan  Karena barisanya merupakan barisan pecah, maka kita cari rumus barisan pembilang  dan rumus barisan untuk penyebut 

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahui barisan pembilang adalah , maka diketahui , , , dan , didapat :

⇒

⇒

⇒

Karena  maka barisan  adalah barisan kuadrat, maka diperoleh nilai 

⇒

⇒

⇒

Diperoleh  sehingga 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi rumus barisan pembilang  adalah 

**➊. Barisan Penyebut ()**

Diketahui barisan penyebut adalah  sehingga diketahui , , ,  dan didapat :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka  dan barisan adalah barisan linier, sehingga rumusnya :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

karena rumus barisan  adalah  maka rumus deret  adalah 

* 1. **Uji Konvergensi Deret Takhingga**

Seorang yang bernama Zeno mengatakan dalam suatu paradoksnya, yaitu seorang pelari tidak mungkin dapat mengakhiri suatu pertandingan. Dalam pikiran Zeno dimisalkan jarak pertandingan yang panjangnya 1 mil, ruas jarak dalam pikiran Zeno adalah mil, mil, mil dan seterusnya seperti digambarkan pada Gambar 2.2.

Gambar 2.2 : Pikiran Zeno tentang Jarak



Dalam bahasa matematika, mengakhiri pertandingan berarti kita harus menghitung jumlahnya yaitu



Jumlah parsial deret tersebut dapat kita katakan :









Jika n mendekati takterhingga, maka jumlah parsial itu dapat dihitung dengan limit taterhingga yaitu :



Secara umum jika diketahui sebuah deret yaitu :



Kita singkat sebagai dan bentuk tersebut dikatakan deret takterhingga dan disebut jumlah parsial ke n.



**Definisi :**

**Deret takhingga**  **konvergen dan memiliki jumlah S, apabila barisan jumlah-jumlah parsialnya**  **konvergen menuju S, apabila**  **divergen, maka deretnya juga divergen, suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah**

**Contoh 2.26 :**

Diketahui deret takterhingga  apakah deret itu konvergen dan memiliki jumlah ?

**Penyelesaian 2.26 :**

Diketahui deret , maka jumlah parsial deret tersebut adalah :











Didapat barisan jumlah-jumlah parsialnya  adalah  atau sehingga diperoleh  dan nilai Limitnya adalah :, karena barisan jumlah parsialnya  konvergen menuju ke 1, maka deret konvergen dan memiliki jumlah 1

**Contoh 2.27 :**

Diketahui deret takhingga apakah deret itu konvergen dan mempunyai jumlah

**Penyelesaian 2.27 :**

Diketahui deret  maka jumlah parsial deret tersebut adalah :











Didapat barisan jumlah-jumlah parsialnya  adalah  atau  sehingga diperoleh  dan nilai Limitnya adalah :, karena barisan jumlah parsialnya konvergen menuju ke , maka deret konvergen dan memiliki jumlah 

**Contoh 2.28 :**

Diketahui deret takhingga  apakah deret itu konvergen dan mempunyai jumlah

**Penyelesaian 2.28 :**

Diketahui deret  maka jumlah parsial deret tersebut adalah :











Didapat barisan jumlah-jumlah parsialnya  adalah  atau  sehingga diperoleh  dan nilai Limitnya adalah :, karena barisan jumlah parsialnya  tidak konvergen atau divergen, maka deret divergen dan tidak mempunyai jumlah.

**Teorema A :**

**Apabila** **konvergen, maka** **setara dengan pernyataan ini ialah bahwa apabila**  **(atau apabila** **) maka deret divergen**

**Contoh 2.29 :**

Buktikan bahwa  Divergen

**Penyelesaian 2.29 :**

Diketahui rumus deret yaitu , maka diperoleh , dan karena nilai , atau karena , maka menurut Teorema A deret  Divergen

**Contoh 2.30 :**

Diketahui Deret sebagai berikut  tentukan apakah deret itu konvergen ?

**Penyelesaian 2.30 :**

Diketahui deret , maka barisannya adalah , untuk menentukan deret itu konvergen atau divergen, maka kita harus menentukan rumus deret tersebut yaitu :

**➊. Barisan Pembilang ()**

Diketahui barisan pembilangnya adalah , maka**, , , ,** ini merupakan barisan konstan, sehingga rumus barisannya ****

**➊. Barisan Penyebut ()**

Diketahui barisan penyebutnya adalah  maka **, , , ,** karena selisih dua suku yang berdampingan sama, yaitu

⇒ ****

⇒ ****

⇒ ****

Karena ****, maka barisan  adalah barisan linier dengan  dan rumusnya adalah **:**

⇒ 

⇒

⇒

⇒

Sehingga rumus barisan  adalah 

Sehingga rumus barisan pecah  adalah **** atau **** sehingga rumus deret  adalah **** , jika rumus barisan kita limitkan, maka diperoleh  menurut Teorema A, maka deret  dikatakan konvergen.

Sebuah deret yang konvergen mempunyai beberapa sifat yaitu :

**Teorema B :**

**Jika** **dan** **keduanya** **konvergen dan c sebuah konstanta,** **dan** **juga konvergen, selain itu :**

**1.** 

**2.** 

**Contoh 2.31 :**

Diketahui Deret sebagai berikut  tentukan apakah deret itu konvergen ?

**Penyelesaian 2.31 :**

Deret yang diketahui yaitu  dapat dinyatakan sebagai jumlah dari dua buah deret yaitu :

, maka dapat kita nyatakan sendiri-sendiri yaitu :

♦. Untuk deret , maka berarti diketahui  sehingga , karena , maka deret  konvergen.

♦. Untuk deret , maka berarti diketahui sehingga , karena , maka deret  konvergen

♦. Karena deret  dan deret  konvergen, maka deret  juga konvergen

**Teorema C :**

**Jika** **Divergen dan c ≠ 0, maka** **Divergen**

**Contoh 2.32 :**

Diketahui Deret sebagai berikut  tentukan apakah deret itu konvergen ?

**Penyelesaian 2.32 :**

Diketahui sebuah Deret , maka didapat  sehingga  karena  yaitu  maka deret  Divergen, menurut teorema B(1) bahwa  sehingga didapat  sehingga  karena , maka deret  juga divergen

**Soal-Soal Latihan**

1. **Diketahui deret berikut**

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

♦. Tentukan rumus eksplisit deret tersebut

♦. Tentukan apakah deret itu konvergen atau divergen

1. **Periksalah deret di bawah ini konvergen atau divergen**

1.  6. 

2.  7. 

3.  8. 

4.  9. 

5.  10. 

**C. Apakah deret di bawah ini konvergen ?, jika iya tentukan jumlahnya**

1. 

2. 

3. 

4. 

* 1. **Deret Ganti Tanda**

Deret yang telah kita bahas adalah deret-deret dengan suku yang positif, sekarang bagaimana jika terdapat deret yang suku-sukunya ada yang positif dan ada yang negatif dengan kata lain berganti tanda, misalnya :





maka untuk menentukan rumus deretnya sama seperti yang telah kita pelajari, hanya ditambahkan  jika suku pertama bertanda negatif, dan tambahkan  jika suku pertama bertanda positif

**Contoh 2.33 :**

Diketahui deret 

**Penyelesaian 2.33 :**

Jika deret  kita menganggap setiap suku positif semua, maka diperoleh deret  , dan kita peroleh barisannya yaitu  maka untuk menentukan  seperti yang telah dipelajari, yaitu :

**➊. Barisan Pembilang **

Diketahui barisan pembilang adalah : sehingga dengan jelas diperoleh bahwa rumus barisan pembilang adalah : ****

**➊. Barisan Penyebut **

Diketahui barisan penyebut adalah :  sehingga diperoleh , ,  dan , maka didapat :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Karena , maka barisan penyebut adalah barisan linier dengan  dan rumusnya :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi 

Sehingga diperoleh rumus barisan  adalah Karena suku pertama deret  bertanda positif, maka rumus deretnya adalah :

Jika  kita limitkan, maka diperoleh  artinya deret  konvergen

**Teorema :**

**Andaikan** **suatu deret ganti tanda dengan . dan Apabila , maka deret konvergen**

* 1. **Deret Pangkat (Deret Kuasa)**

Pada pembahasan deret yang telah kita pelajari adalah deret yang setiap sukunya merupakan suatu konstanta atau bilangan atau berbentuk  dimana  atau , , ,  dan seterusnya merupakan sebuah bilangan, baik pada deret konstan, deret linier, deret kuadrat maupun deret rasional, jika diketahui suatu deret yang mempunyai rumus  dimana  merupakan sebuah fungsi yang mengandung variable , maka deret  disebut ***deret pangkat takhingga*** atau ***deret kuasa takhingga*** yaitu sebuah deret yang setiap sukunya mengandung sebuah variable  atau setiap sukunya merupakan fungsi 

**Contoh 2.34 :**

**♦.** 

**♦.** 

♦. 

♦. 

Karena setiap sukunya masih mengandung sebuah variabel , maka didalam rumusnya atau  masih mengandung variabel , sehingga jika dilimitkan belum diketahui ada atau tidaknya nilai limit, sehingga belum diketahui deret itu konvergen atau tidak.

Agar deret pangkat tersebut dapat diketahui konvergen atau tidak, maka harus ditentukan nilai-nilai  yang menyebabkan deret pangkat menjadi konvergen, karena nilai-nilai  yang menyebabkan deret pangkat konvergen jumlahnya begitu banyak, maka dinyatakan dalam sebuah interval atau selang yang disebut **selang konvergensi**.

**Teorema A :**

Himpunan Kekonvergenan atau Selang Konvergensi sebuah deret pangkat  selalu berbentuk selang yang berupa salah satu dari ketiga jenis berikut :

1. satu titik di 
2. Seluruh himpunan bilangan 
3. Selang , mungkin ditambah kedua atau salah satu titik ujungnya
   * 1. **Uji Hasilbagi Mutlak**

Untuk menentukan selang konvergensi sebuah deret pangkat  digunakan uji hasilbagi mutlak, yaitu :

,



jika nilai :

* 1. ρ = ∞

Dikatakan selang konvergensinya ada di satu titik, yaitu 

* 1. ρ = 0

Dikatakan selang konvergensi seluruh bilangan Riil atau 

* 1. ρ = ada nilainya

Dikatakan selang konvergensinya diperoleh jika 

**Contoh 2.35 :**

Diketahui Deret sebagai berikut  tentukan selang konvergensinya

**Penyelesaian 2.35 :**

Untuk menentukan selang konvergensi deret tersebut, maka tentukan dulu rumus deretnya, untuk menentukan rumus deret pangkat, caranya sama deperti menentukan rumus deret biasa yaitu dilihat yang berubah, yaitu :



Dilihat deret di atas, maka ada tiga yang berubah, yaitu :

1. Pangkat variabel  yaitu 
2. Penyebut depan yaitu 
3. Penyebut belakang yaitu 

Ketiga unsur yang berubah tersebut yang harus ditentukan rumusnya, yaitu :

1. Pangkat variabel  yaitu 

•. Merupakan barisan linier dengan  dan 

•. Rumus barisannya 

1. Penyebut depan yaitu 

•. Merupakan barisan linier dengan  dan 

•. Rumus barisanya 

1. Penyebut belakang yaitu 

•. Merupakan barisan eksponensial 

Sehingga deret pangkat  mempunyai rumus  didapat  dan  sehingga  dapat ditentukan, yaitu :

⇒

⇒

⇒

⇒

⇒

⇒

Didapat  (kriteria a) dan  (kriteria b), maka  (kriteria c), maka agar deret konvergen selang konvergensinya diperoleh jika , sehingga diperoleh

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Artinya deret  akan konvergen jika nilai-nilai  didalam selang .

**Contoh 2.36 :**

Diketahui Deret sebagai berikut  tentukan selang konvergensinya

**Penyelesaian 2.36 :**

Untuk menentukan selang konvergensi deret tersebut, maka tentukan dulu rumus deretnya, untuk menentukan rumus deret pangkat, caranya sama deperti menentukan rumus deret biasa yaitu dilihat yang berubah, yaitu :



Dilihat deret di atas, maka ada dua yang berubah, yaitu :

1. Pangkat variabel  yaitu 
2. Penyebutnya yaitu 

kedua unsur yang berubah tersebut yang harus ditentukan rumusnya, yaitu :

1. Pangkat variabel  yaitu 

•. Merupakan barisan linier dengan  dan 

•. Rumus barisannya 

1. Penyebutnya yaitu 

•. Merupakan barisan faktorial

•. Rumus barisanya 

Sehingga deret pangkat  mempunyai rumus  didapat  maka  sehingga  dapat ditentukan, yaitu :

⇒

⇒

⇒

⇒

⇒

⇒

⇒

Karena  sesuai kriteria b, maka selang konvergensi untuk deret  adalah seluruh bilangan Riil atau 

**Soal-Soal Latihan**

1. **Tentukan Selang Konvergensi dari deret pangkat berikut**

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

1. **Tentukan Himpunan Kekonvergenan dari deret berikut**

1.  6. 

2.  7. 

3.  8. 

4.  9. 

5.  10. 

* 1. **Deret Taylor**

Diketahui sebuah fungsi , fungsi tersebut dikatakan dapat buat deretnya jika  merupakan fungsi yang mempunyai turunan sampai turunan ke-, deret pangkat dari  atau , jika bilangan-bilangan  ada sehingga  dapat digambarkan sebuah deret pangkat yaitu :



jika bilangan-bilangan  diperoleh dari :









dst

apabila kita substitusikan  kedalam turunan-turuna di atas, maka kita akan memperoleh nilai-nilai 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

Maka secara umum deret Taylor untuk sebuah fungsi dinyatakan sebagai berikut :



**Teorema :**

**Andaikan  sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkatan dalam selang , syarat yang perlu dan cukup agar deret Taylor**

****

**Menggambarkan fungsi  pada selang itu dan  dimana  adalah suku sisa dalam Rumus Deret Taylor, yaitu **

**Dengan  suatu bilangan dalam selang **

**Contoh 2.37 :**

Diketahui suatu fungsi  tentukan deret Taylor untuk 

**Penyelesaian 2.37 :**

Karena rumus deret Taylor adalah :

****

Maka harus ditentukan :

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

Karena , maka fungsi  tidak dapat dibuat deret Taylornya

**Contoh 2.38 :**

Tentukan Deret Taylor disekitar  untuk fungsi 

**Penyelesaian 2.38 :**

Karena rumus deret Taylor adalah :

****

Maka harus ditentukan :

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

Maka deret Taylornya :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Dan rumus deret Taylornya :

⇒ 

**Contoh 2.39 :**

Tentukan Deret Taylor disekitar a = π utnuk fungsi 

**Penyelesaian 2.39 :**

Karena rumus deret Taylor adalah :

****

Maka harus ditentukan :

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

Maka deret Taylor untukpada x = π adalah :

⇒  





⇒  



⇒  



⇒ 

**Soal-Soal Latihan**

**Tentukan Deret Taylor dan Rumus Deretnya dari fungsi berikut :**

1.  pada 

2.  pada 

3.  pada 

4.  pada 

5.  pada , sebagai catatan 

6.  pada 

7.  pada 

8.  pada 

9.  pada 

10. pada 

* 1. **Deret Mclaurint**

Diketahui sebuah fungsi , fungsi tersebut dikatakan dapat buat deretnya jika  merupakan fungsi yang mempunyai turunan sampai turunan ke-, deret pangkat dari , jika bilangan-bilangan  ada sehingga  dapat digambarkan sebuah deret pangkat yaitu :



jika bilangan-bilangan  diperoleh dari :









dst

apabila kita substitusikan  kedalam turunan-turuna di atas, maka kita akan memperoleh nilai-nilai 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

⇒  ⇒  ⇒ 

Maka secara umum deret Mclaurint untuk sebuah fungsi dinyatakan sebagai berikut :



**Teorema :**

**Andaikan  sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkatan dalam selang , syarat yang perlu dan cukup agar deret Mclaurint**

****

**Menggambarkan fungsi  pada selang itu dan  dimana  adalah suku sisa dalam Rumus Deret Maclaurin, yaitu **

**Dengan  suatu bilangan dalam selang **

**Contoh 2.40 :**

Tulislah  sebagai suatu deret Maclurint dan gunakan hasilnya untuk menentukan nilai pendekatan  sampai 5 angka di belakang koma

**Penyelesaian 2.40 :**

Diketahui  atau , maka deret Maclourinnya sebagai berikut :

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒  ⇒ 

Deret Maclaurinya :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

Untuk menghitung nilai pendekatan , maka kita menginputkan nilai , sehingga deret di atas menjadi :

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

**⇒ **

**Soal-Soal Latihan**

**Tentukan Deret Maclaurint dan Rumus Deretnya dari fungsi berikut :**

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10.